תתי מרחבים של מרחבי מטריצות ופולינומים.

- יש לפתור את כל השאלות (כולל אלו שתיפתרנה בתירגול)
- $\mathrm{Mat}\,(m,n)$ הוא המרחב הוקטורי של כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם כניסות ממשיות. $P_m\,[x]$ הוא המרחב הוקטורי של כל הפולינומים מדרגה $\geq m$ עם מקדמים ממשיים.

שאלה 1

בכל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם תת הקבוצה V של $\mathrm{Mat}\,(m,n)$ או $P_m[x]$ היא מרחב וקטורי. אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, מצאו את $dim(V)$ ותנו דוגמה לבסיס של V.

1. $V \subset \mathrm{Mat}\,(2,3)$ היא הקבוצה של כל המטריצות A מגודל 2×3 כך ש- $\mathrm{rank}(A) = 2$
2. $V \subset \mathrm{Mat}\,(2,3)$ היא הקבוצה של כל המטריצות A מגודל 2×3 כך ש- $A_{1,2} + A_{2,3} = 0$ ו- $A_{1,3} + A_{2,1} = 0$
3. $V \subset \mathrm{Mat}\,(2,3)$ היא הקבוצה של כל המטריצות A מגודל 2×3 כך ש- $A_{1,2} \cdot A_{2,3} = 0$
4. $V \subset \mathrm{Mat}\,(2,3)$ היא הקבוצה של כל המטריצות A מגודל 2×3 כך ש- $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$
5. $V \subset \mathrm{Mat}\,(2,3)$ היא הקבוצה של כל המטריצות A מגודל 2×3 כך ש- $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 0$
6. $V \subset \mathrm{Mat}\,(6,6)$ היא הקבוצה של כל המטריצות A מגודל 6×6 כך ש- $\det(A) = 0$
7. $V \subset \mathrm{Mat}\,(6,6)$ היא הקבוצה של כל המטריצות A מגודל 6×6 שהן:
   (א) אלכסוניות
   (ב) סימטריות
   (ג) אנטי-סימטריות
   (ד) משולשיות עליונות
8. $V \subset \mathrm{Mat}\,(6,6)$ היא הקבוצה של כל המטריצות A מגודל 6×6 כך ש- $A^2 = 0$
9. $V \subset P_6[x]$ היא הקבוצה של כל הפולינומים $p(t)$ מדרגה ≥ 6 כך ש:
   (א) $p(2) = 1$
   (ב) $p(1) = 0$
   (ג) $p(1) \cdot p(2) = 0$
   (ד) $p'(1) = 0$
   (ה) $p(1) + p'(1) = 0$
   (ו) $p(1) \cdot p'(1) = 0$
10. $V \subset P_7[x]$ היא הקבוצה של כל הפולינומים $p(t)$ מדרגה ≥ 7 כך ש- $p(3) = p'(0)$ וגם $p(0) = p'(3)$
11. $V \subset P_7[x]$ היא הקבוצה של כל הפולינומים $p(t)$ מדרגה ≥ 7 כך ש- $t^2 + 1$ מחלק אותם (דהיינו, קיים פולינום $q(t)$ מדרגה ≥ 5 כך ש- $p(t) = (t^2+1)q(t)$)

שאלה 2

מי מבין הטענות הבאות נכונות?

1. כל 10 מטריצות 4×4 סימטריות הן תלויות לינארית.
2. כל 11 מטריצות 4×4 סימטריות הן תלויות לינארית.
3. כל 7 מטריצות 4×4 אנטי-סימטריות הן תלויות לינארית.
4. כל 8 מטריצות 4×4 אנטי-סימטריות הן תלויות לינארית.
5. כל 9 מטריצות 4×4 משולשיות עליונות בלתי תלויות לינארית הן בסיס למרחב הוקטורי של כל המטריצות 4×4 המשולשיות עליונות.
6. כל 10 מטריצות 4×4 משולשיות עליונות בלתי תלויות לינארית הן בסיס למרחב הוקטורי של כל המטריצות 4×4 המשולשיות עליונות.
7. יהא V התת מרחב של $P_4[t]$ המכיל את הפולינומים $p(t)$ מדרגה $4 \geq$ כך ש-$p(1) = p(2) = 0$.
   (א) כל 4 פולינומים ב-V הם תלויים לינארית.
   (ב) כל 2 פולינומים ב-V לא פורשים את V.
8. יהיו $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & b \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & c \end{pmatrix}$
   (א) לכל a, b, c המטריצות A_1, A_2, A_3, A_4 הן תלויות לינארית.
   (ב) לכל a, b, c המטריצות A_1, A_2, A_3, A_4 אינן פורשות את $\mathrm{Mat}(2,2)$.
   (ג) המטריצות A_1, A_2, A_3 הן תלויות לינארית אם ורק אם $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \end{pmatrix} \neq 0$
   (ד) אם $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ אינם בסיס למרחב כל המטריצות 2×2 הסימטריות אז $A_3 \in \mathrm{span}\{A_1, A_2\}$ ו-$A_4 \in \mathrm{span}\{A_1, A_2\}$.
   (ה) אם $A_3 \notin \mathrm{span}\{A_1, A_2\}$ ו-B היא מטריצת 2×2 כלשהי כך ש-$B_{1,2} \neq B_{2,1}$ אז $\{A_1, A_2, A_3, B\}$ היא בסיס ל-$\mathrm{Mat}(2,2)$.